BOLETÍN ITSL

μαΤΕΧμαΤιχασ

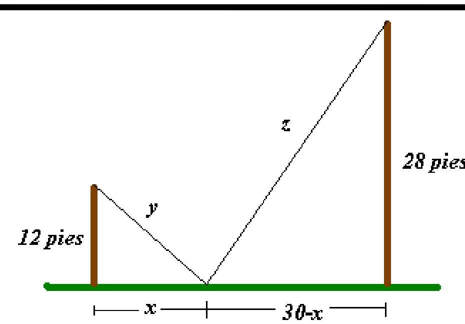
LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

AÑO 2 NÚMERO 02 SEPTIEMBRE DE 2010

EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DEL **LABORATORIO DE MATEMÁTICAS** ES UNA PUBLICACIÓN MENSUAL DURANTE EL PERIODO ESCOLAR DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE LERDO Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO MOSTRANDO LA APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

CÁLCULO DIFERENCIAL (MATEMÁTICAS I)



Sean ***z*** e ***y***, las longitudes desde la estaca a la parte superior de los postes, y **x** la longitud de la estaca a uno de los postes, tal como se muestra en la figura, ¿Cuál sería la distancia **x** para utilizar la menor cantidad de cable?

SOLUCIÓN:

Si *s* es la longitud del cable a minimizar, se puede escribir la ecuación:

$$s = y + z$$

Con base en el teorema de Pitágoras, se obtiene:

$$x^2 + (12)^2 = y^2 \qquad \text{y} \qquad (30-x)^2 + (28)^2 = z^2$$

Lo que implica que $y = \sqrt{x^2 + 144}$ $\quad z = \sqrt{x^2 - 60x + 1684}$

Entonces, *s* está determinado por $s(x) = y + z$ sustituyendo $s(x) = \sqrt{x^2 + 144} + \sqrt{x^2 - 60x + 1684}, \quad 0 \le x \le 30$

La derivada de *s* con respecto a *x* es: $\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \dfrac{x-30}{\sqrt{x^2 - 60x + 1684}}$

Analizando, se tiene que el mínimo se encuentran cuando $\dfrac{ds}{dx} = 0$, en consecuencia:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+144}} + \frac{x-30}{\sqrt{x^2-60x+1684}} = 0 \ \Rightarrow \ x\sqrt{x^2-60x+1684} = (30-x)\sqrt{x^2+144}$$

$$x^2\left(x^2 - 60x + 1684\right) = (30-x)^2\left(x^2+144\right) \ \Rightarrow \ x^4 - 60x^3 - 1684x^2 = x^4 - 60x^3 + 1044x^2 - 8640x + 129600$$

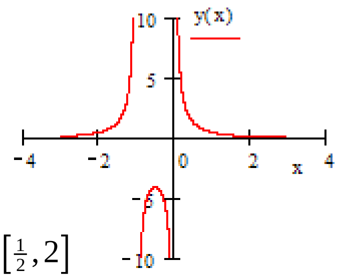
$$640x^2 + 8640x - 129600 = 0 \ \Rightarrow \ 320(x-9)(2x+45) = 0$$

De donde: $x = 9, \quad x = -22.5$

Como $x = -22.5$ se encuentra fuera del dominio de la función $s(x)$, se concluye que la estaca debe colocarse a una distancia de 9 pies con respecto al poste de la izquierda, para que la cantidad de cable sea *s*(9) = 50 pies (mínima).

CÁLCULO INTEGRAL (MATEMÁTICAS II)

Obtener el área A bajo la grafica de $y=\dfrac{1}{x(x+1)}$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$.



SOLUCIÓN:

Se grafica el área en cuestión, para indagar si existen discontinuidades en el intervalo, se muestra la figura

O también se obtiene que $x\neq\{0,-1\}$ y que el intervalo de (0,∞) contiene el intervalo de $\left[\frac{1}{2},2\right]$

Que es continuo. Por lo tanto, se tiene que $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{dx}{x(x+1)}$

Empleando fracciones parciales $\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+1}\quad=\dfrac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}\qquad 1=A(x+1)+Bx$

$$=(A+B)x+A$$

La solución del sistema $\begin{aligned}0&=A+B\\1&=A\end{aligned}$

Es inmediata; $A=1,\quad B=-1,$ por lo tanto $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right]dx\quad=\Big[\big(\ln|x|-\ln|x+1|\big)\Big]_{\frac{1}{2}}^{2}\quad=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$

$=\ln 2\approx 0.6831$ unidades cuadradas

CÁLCULO VECTORIAL (MATEMÁTICAS III)

La trayectoria de un avión está definida por la función $\vec{r}(t)=\left(100\cos t\ \mathbf{i}+100\operatorname{sen}t\ \mathbf{j}+\sqrt{1+100^2}\,t\ \mathbf{k}\right)\mathrm{m}$, encuentre el vector tangencial unitario de dicha trayectoria.

SOLUCIÓN:

El vector tangencial está definido por la ecuación: $\mathbf{\vec{T}}=\dfrac{\mathbf{\vec{r}}'(t)}{\left\|\mathbf{\vec{r}}'(t)\right\|}$

Por lo tanto el primer paso es derivar $\vec{r}(t)$

$\vec{r}\,'(t)=-100\sin t\ \mathbf{i}+100\cos t\ \mathbf{j}+\sqrt{1+100^2}\ \mathbf{k}$

La magnitud de $\vec{r}(t)$ está dada por

$|r\,'(t)|=\sqrt{(-100\operatorname{sen}t)^2+(100\cos t)^2+\left(\sqrt{1+100^2}\right)^2}$

Despreciando el valor de 1 tenemos

$\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=100\sqrt{2}$

Aplicando la fórmula del vector tangencial unitario obtenemos:

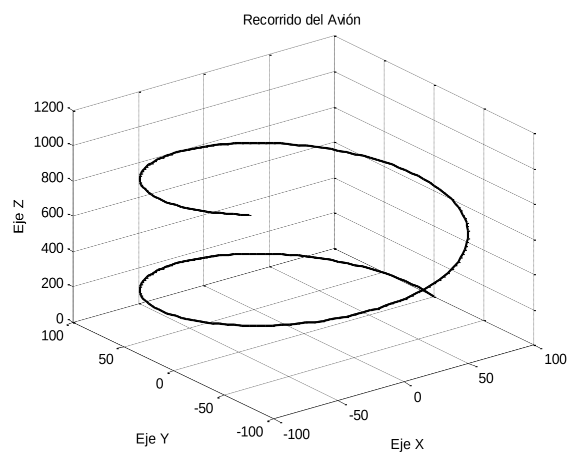


Figura 1. Recorrido del avión en la trayectoria $\vec{r}(t)$

$$\vec{\mathbf{T}} = \frac{-100\sin t}{100\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{100\cos t}{100\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{\sqrt{1+100^2}}{100\sqrt{2}}\mathbf{k} \qquad \vec{\mathbf{T}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES (MATEMÁTICAS V)

Aplicación de Laplace a Circuito Eléctricos.

Encontrar una ecuación que me describa el comportamiento de la corriente en cualquier instante del circuito que se muestra en la figura MV.1

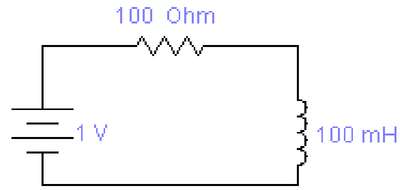


Figura MV.1 Circuito RL

SOLUCIÓN:

Aplicando la ley de mallas de kirchhoff tenemos que $V_f = V_R + V_L$, sustituyendo $1 = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$

Pasando la ecuación anterior a Laplace $\frac{1}{s} = Ri(s) + L\left[si(s) - i(0)\right]$

Si las condiciones iniciales son *i(0)=0* y despejando *i(s)*, entonces $i(s)\left[R + Ls\right] = \frac{1}{s}$ $\qquad i(s) = \frac{1}{s(R+Ls)} = \frac{1/L}{s(R/L+s)}$

Utilizando fracciones parciales.

$i(s) = \frac{1/L}{s\left(\frac{R}{L}+s\right)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{\frac{R}{L}+s}$ por lo tanto $\qquad A = \left.\frac{\frac{1}{L}}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}\right|_{s\to 0} = \frac{1}{R}$

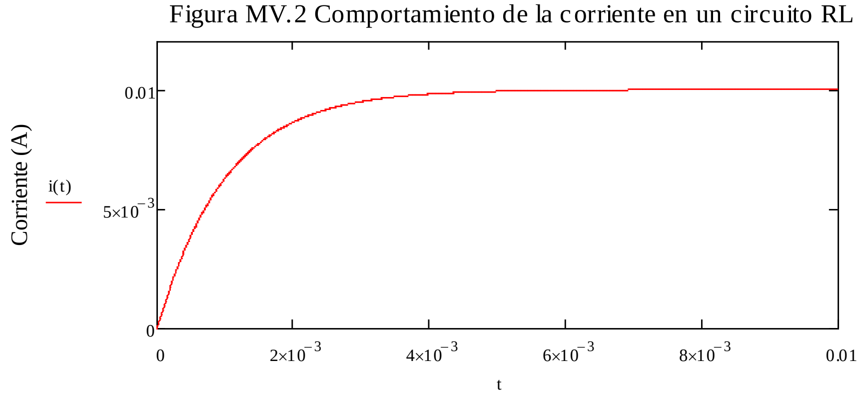
$B = \left.\frac{\frac{1}{L}}{s}\right|_{s\to -\frac{R}{L}} = -\frac{1}{R}$ sustituyendo los valores encontrados tenemos que: $\quad i(s) = \frac{\frac{1}{R}}{s} + \frac{-\frac{1}{R}}{\left(\frac{R}{L}+s\right)}$

Aplicando la trasformada de Laplace inversa $\quad i(t) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$

Sustituyendo los valores de R y L $\quad \underline{i(t) = 0.01 - 0.01e^{-1000t}}$

Esta ecuación nos describe el comportamiento de la corriente en un circuito RL y se muestra en la figura MV.2.

Figura MV.2 Comportamiento de la corriente en un circuito RL



Tiempo (s)

ALGEBRA LINEAL (MATEMÁTICAS IV)

Área de un Triangulo.

Encuentre el área del triangulo cuyos vértices son los puntos $(1,0),(2,2),\text{ y }(4,3)$ Como se muestra en la Figura MIV.1

SOLUCIÓN:

Área de un triángulo en el plano (x,y) cuyos vértices son $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\text{ y }(x_3,y_3)$ esta dada por

$$\text{Área}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$ cuando el signo $\pm$ se elige para obtener el área positiva.

Nota: No es necesario conocer la posición relativa de los tres vectores. Simplemente aplicamos el determinante

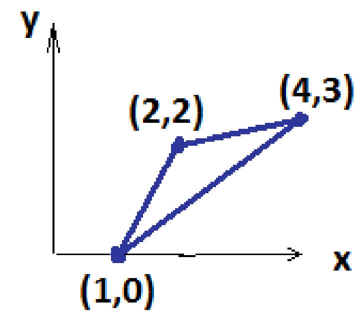


Figura MIV.1 Triángulo formado por los puntos.

Por lo tanto, la matriz formada con los puntos dados en el problema queda de la siguiente manera

$$\text{Área}=\pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Para encontrar el valor del determinante agregamos las dos primeras columnas y multiplicamos cruzado

$$\text{Área}=\pm\frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right|=\pm\frac{1}{2}\left[(1)(2)(1)+(0)(1)(4)+(1)(2)(3)-(0)(2)(1)-(1)(1)(3)-(1)(2)(4)\right]$$

$$\text{Área}=\pm\frac{1}{2}\left[2+0+6-0-3-8\right]=\pm\frac{1}{2}\left[-3\right]$$

Por lo tanto el área del triángulo es de $\frac{3}{2}u^2$

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS ASESORIAS DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

HORA	LUNES	MARTES	MIERCOLES	JUEVES	VIERNES
08:00				MANUEL PULIDO	
09:00	C. LUNA / M. PULIDO	C. LUNA / M. PULIDO	MANUEL PULIDO	C. LUNA / M. PULIDO	MANUEL PULIDO
10:00	MANUEL PULIDO	MANUEL PULIDO	MANUEL PULIDO	MANUEL PULIDO	C. LUNA / M. PULIDO
11:00	CARLOS LUNA	CARLOS LUNA	CARLOS LUNA	C. LUNA / M. VÁSQUEZ	
12:00	C. LUNA / M. VÁSQUEZ	C. LUNA / M. VÁSQUEZ	C. LUNA / M. VÁSQUEZ	C. LUNA / M. VÁSQUEZ	
13:00	MARCIAL VÁSQUEZ	MARCIAL VÁSQUEZ	MARCIAL VÁSQUEZ		C. LUNA / M. VÁSQUEZ

NOTA: NOS ENCONTRAMOS EN BIBLIOTECA, A UN LADO DEL CENTRO DE COMPUTO.

ASESORIAS DE MATEMÁTICAS: ING.MIGUEL RIOS, DE LUNES A VIERNES DE 10:00 A 11:00 CUBO 21 EDIFICIO "D"

¡SOMOS CORRECAMINOS DE CORAZÓN!

PRODUCCIÓN: ING. MANUEL ISMAEL PULIDO MEDINA, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. CARLOS ROBERTO LUNA GONZÁLEZ, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. MARCIAL HUMBERTO VÁSQUEZ CORRAL, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. MIGUEL ANGEL RIOS FAVELA, DIVISIÓN DE ELECTRÓNICA.

Toda educación científica que no se inicia con la Matemática es imperfecta en su base

AUGUSTO COMTE