

BOLETÍN ITSL

# μαΤΕΧματιχασ

LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

AÑO 2 NÚMERO 01 FEBRERO DE 2010


## EDITORIAL

ESTE BOLETÍN DEL **LABORATORIO DE MATEMÁTICAS** ES UNA PUBLICACIÓN MENSUAL DURANTE EL PERIODO ESCOLAR DIRIGIDA A LOS ESTUDIANTES DE INGENIERÍA DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO SUPERIOR DE LERDO Y SU OBJETIVO ES APOYAR SU DESEMPEÑO MOSTRANDO LA APLICACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS.

## CÁLCULO DIFERENCIAL (MATEMÁTICAS I)

Una compañía que renta lanchas para ríos turbulentos sabe que, a un precio de \$80 por viaje de medio día, atrae a 300 clientes. Por cada rebaja de \$5 en el precio, atrae a 30 clientes más. ¿Qué precio debe cobrar la empresa para maximizar su ingreso?

**SOLUCIÓN:**

Hay que encontrar la ecuación que relaciona al precio con la demanda. Si el precio, "p" en dólares, es 80, el número de paseos vendidos, "q" es de 300. Si p es 75, entonces q es 330, y así sucesivamente (Tabla 1).

| ***Precio*** ***p*** | ***Número de paseos vendidos*** ***q*** |
|---|---|
| 80 | 300 |
| 75 | 330 |
| 70 | 360 |
| 65 | 390 |
| … | … |

**Tabla 1.** Relación del número de paseos en función del precio.

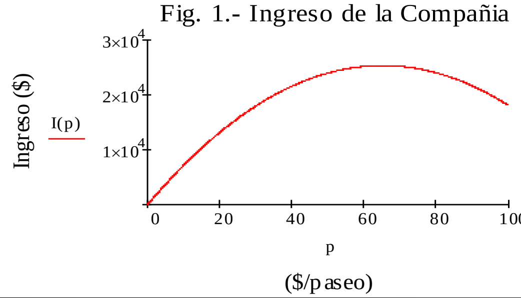
Observando la tabla 1, nos damos cuenta que la demanda q, es una función lineal del precio p (se rige por la ecuación de la recta). La pendiente es ${}^{-30}\!/_{5} = -6$, por lo que la función de la demanda es $q=-6p+b$, donde b es la ordenada en el origen. Ya que $p = 80$, $q = 300$ satisface la ecuación $q=-6p+b$ y tenemos

$$300 = -6 * 80 + b \qquad 300 = -480 + b \qquad 780 = b$$

Por lo cual la ecuación queda $q = -6p + 780$. Como el ingreso $I = p * q$, el ingreso como función del precio es

$I(p) = p(-6p + b) = -6p^2 + 780p$, al graficar esta función podemos observar el máximo de esta función de ingreso.

Fig. 1.- Ingreso de la Compañia




Para determinar analíticamente el máximo, derivamos la función de ingreso y hallamos los puntos críticos: $I'(p) = -12p + 780 = 0$

$p = \dfrac{-780}{-12} = 65$ es ingreso máximo se logra cuando el precio es de \$65.

## CÁLCULO INTEGRAL (MATEMÁTICAS II)

En una cierta población, la demanda de gasolina está creciendo exponencialmente a un ritmo de 5% por año. Si la demanda actual es de 4 millones de litros por año, ¿cuánta gasolina se consumirá durante los próximos 3 años?

**SOLUCIÓN:** Sea **D** La demanda de gasolina durante los próximos 3 años, y recordando que una función exponencial se describe como $Pe^{kt}$ , donde $P$ es la demanda actual o inicial, $k$ es la tasa de porcentaje y $t$ es el tiempo; entonces $\frac{dD}{dt} = Pe^{kt}$ es la función básica exponencial.

A la función se le sustituye los datos del problema $P = 4 \times 10^6$ litros por año y $k = 0.05$ (5%/100)

Obteniéndose $\frac{dD}{dt} = 4 \times 10^6 e^{0.05t}$ . Se debe integrar está función para obtener el consumo de gasolina durante los próximos 3 años (entre 0 y 3 como límites de la integral).

**Resuelto en el mathcad professional obtenemos**

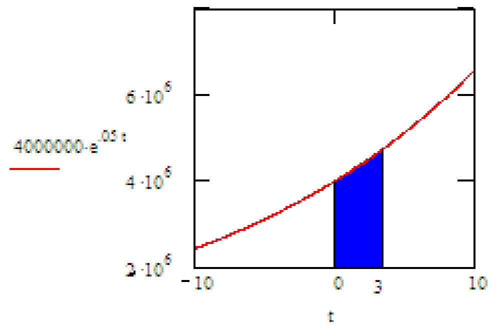
Esto se traduce a:

$$\frac{dD}{dt} = 4 \times 10^6 e^{0.05t} \Leftrightarrow dD = 4 \times 10^6 e^{0.05t} dt$$

$$\int_0^3 dD = \int_0^3 4 \times 10^6 e^{0.05t} \mathrm{dt} \Leftrightarrow$$

$$D = \frac{4\times10^6}{0.05} e^{0.05t} \Big|_0^3 = \frac{4\times10^6}{0.05} \left( e^{0.05(3)} - e^{0.05(0)} \right)$$

$$\cong 12946739.4183 \ litros$$




$$\int_0^3 4000000\cdot e^{.05t}\,dt \to 12946739.41826264980 \ \text{float},4 \to 1.295\cdot 10^7$$

## CÁLCULO VECTORIAL (MATEMÁTICAS III)

Un avión, después del despegue, describe una trayectoria definida por la función $\vec{r}(t) = \left(100\cos\ t\ \mathbf{i} + 100\text{sen}\ t\ \mathbf{j} + \sqrt{1+100^2}\ t\ \mathbf{k}\right)\text{m}$. Encuentre la distancia total recorrida por el avión 10 segundos después de que ha tomado dicha trayectoria

**SOLUCIÓN:**

La distancia total recorrida por el avión se calcula con la longitud de arco de la función de la trayectoria, usando la formula: $S = \int_a^b |r'(t)| dt$

Por lo tanto el primer paso es derivar $\vec{r}(t)$

$$\vec{r}\,'(t) = -100\sin t\ \mathbf{i} + 100\cos t\ \mathbf{j} + \sqrt{1+100^2}\ \mathbf{k}$$

La magnitud de $\vec{r}(t)$ está dada por

$$|r'(t)| = \sqrt{(-100\text{sent})^2 + (100\cos t)^2 + \left(\sqrt{1+100^2}\right)^2}$$

$$|r'(t)| = \sqrt{100^2\left(\text{sen}^2 t + \cos^2 t\right) + \left(1+100^2\right)} \qquad |r'(t)| = \sqrt{100^2 + 100^2 + 1}$$

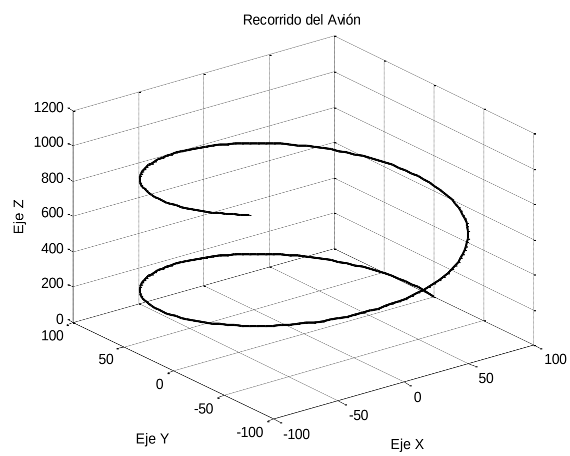



Figura 1. Recorrido del avión en la trayectoria $\vec{r}(t)$

Despreciando el valor de 1 con respecto a los otros tenemos

$$|r'(t)| = 100\sqrt{2}$$

Aplicando ahora la formula de la longitud de arco tenemos

$$S = \int_0^{10} 100\sqrt{2}dt = 100\sqrt{2}\ t\Big|_0^{10} = 100\sqrt{2}(10) = 1000\sqrt{2} = 1414.21\text{m}$$

**ECUACIONES DIFERENCIALES (MATEMÁTICAS V)**

## Modelación Matemática.

En el estudio de los procesos es necesario considerar modelos dinámicos, es decir, modelos de comportamiento variable con respecto al tiempo. Esto trae como consecuencia el uso de ecuaciones diferenciales respecto al tiempo para representar matemáticamente el comportamiento de un proceso.

El hecho de utilizar la transformada de Laplace permite resolver ecuaciones diferenciales lineales mediante la transformación en ecuaciones algebraicas con los cual se facilita su estudio.

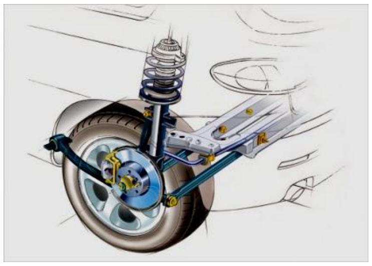


Figura 1.-Suspensión de un automóvil.

### Suspensión de un Automóvil en su forma más Simple.

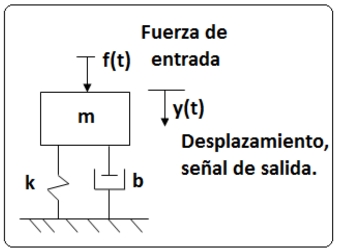



Figura 2.- Modelo simplificado de una suspensión de un automóvil.

Al aplicar la segunda ley de Newton $\sum F = ma$ obtenemos la siguiente ecuación diferencial en función del tiempo.

$$f(t) - k\,y(t) - b\frac{d\,y(t)}{dt} = m\frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

Donde: $b$=1300N/cm $k$=2000N/cm $m$=1800Kg (Estos valores pueden variar).

¿Cuál sería el comportamiento del sistema masa-resorte-amortiguador si súbitamente se suben dos personas (de aproximadamente 80Kg) la cuales provocan una fuerza f (t)= 1600N?

Aplicando la transformada de Laplace a cada término (y considerando condiciones iniciales igual a cero, es decir, sin movimiento):

$$\frac{1600}{s} - 2000Y(s) - 1300sY(s) = 1800s^2 Y(s)$$

Agrupando Y(s) y despejando

$$Y(s) = \frac{1600}{s\left[1800s^2 + 1300s + 2000\right]}$$

Encontrando la transformada inversa de Laplace

$$Y(t) = 0.8 - 0.2917e^{-0.361t}\,sen(0.99t) - 0.8e^{-0.361t}\cos(0.99t)$$

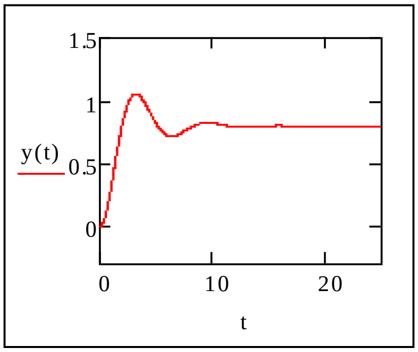



Figura 3.- Comportamiento del sistema masa-resorte-amortiguador.

**Conclusión:** Debido a que las dos personas ejercieron una fuerza externa, el sistema masa-resorte-amortiguado sufre un desplazamiento máximo de 1.07 cm aproximadamente y al paso de 10s se estabiliza, sufriendo un desplazamiento final de 0.8 cm. Si deseamos que modificar el comportamiento del sistema, basta con variar los parámetros de nuestros elementos (*k, b*).

Otra forma de observar el comportamiento del sistema es utilizando técnicas de control, haciendo uso de la función de trasferencia, en la cual, se relaciona la señal de salida y entrada.

$$\frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

## ALGEBRA LINEAL (MATEMÁTICAS IV)

Una compañía administra tres regiones para explotación de madera en las que se cortan pinos, encinos y robles. La compañía tiene un contrato con un aserradero para proveerle de 2000 $m^3$ de madera de pino; 1500 $m^3$ de madera de encino y 800 $m^3$ de madera de roble, todo esto por mes, El volumen de explotación es cada región esta descrito en la tabla 1.

| Región | Explotación/ha | %Pinos | % de Encinos | % Robles |
|---|---|---|---|---|
| Región 1 | $310m^3/ha$ | 80 | 10 | 10 |
| Región 2 | $350\ m^3/ha$ | 10 | 80 | 10 |
| Región 3 | $280\ m^3/ha$ | 10 | 10 | 80 |

**Tabla1.-** Porcentaje de explotación por regiones

Interpretando los datos de la tabla 1 tenemos que, en la Región 1 ($R_1$) se tiene permitido cortar 310 $m^3$ por hectárea, de los cuales 80% es de pino, 10 % es de encino y el otro 10% de roble. De manera análogo para la Región 2 ($R_2$) y la Región 3 ($R_3$).

¿Cuántas hectáreas deben ser explotadas por mes en cada región para satisfacer la demanda del aserradero?

**SOLUCIÓN:** Con estas consideraciones en mente, podemos establecer que $0.8(310)R_1+0.1(350)R_2+0.1(280)R_3=2000$, es decir, de la Región 1 (que son 310 $m^3$/ha) tengo permitido cortar solo el 80% para el pino, Región 2 (que son 350 $m^3$/ha) tengo permitido cortar solo el 10% para el pino y Región 3 (que son 280 $m^3$/ha) tengo permitido cortar solo el 10% para el pino y la suma de estos debe satisfacer al proveedor, el cual requiere 2000$m^3$ de madera de pino.

De manera análoga para el encino y el roble:

$$0.1(310)R_1+0.8(350)R_2+0.1(280)R_3=1500$$

$$0.1(310)R_1+0.1(350)R_2+0.8(280)R_3=800$$

Con estas tres ecuaciones se forma un sistema lineal, en forma de matrices

$$\begin{pmatrix} 248 & 35 & 28 \\ 31 & 280 & 28 \\ 31 & 35 & 224 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Si quiero saber cuánto se debe explotar en cada región entonces:

$$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 248 & 35 & 28 \\ 31 & 280 & 28 \\ 31 & 35 & 224 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1500 \\ 800 \end{pmatrix}$$ por lo cual deberán talar por Región $$\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.235 \\ 4.367 \\ 1.888 \end{pmatrix}$$ hectáreas

Es decir, para satisfacer al proveedor de madera de pino deberá de cortar 7.235ha de la Región 1, 4.367ha de la Región 2 y 1.888ha, y así, análogamente para el encino y roble.

## LABORATORIO DE MATEMÁTICAS

ASESORIAS DE MATEMÁTICAS Y FÍSICA

| HORA | LUNES | MARTES | MIERCOLES | JUEVES | VIERNES |
|---|---|---|---|---|---|
| 08:00 | | | | MANUEL PULIDO | MANUEL PULIDO |
| 09:00 | CARLOS LUNA | | | | |
| 10:00 | | | | | |
| 11:00 | C. LUNA / M. VÁSQUEZ | MARCIAL VÁSQUEZ | C. LUNA / M. VÁSQUEZ | M. VÁSQUEZ/M. PULIDO | |
| 12:00 | MARCIAL VÁSQUEZ | MARCIAL VÁSQUEZ | C. LUNA / M. VÁSQUEZ | M. VÁSQUEZ/M. PULIDO | |
| 13:00 | | | | | |
| 14:00 | CARLOS LUNA | CARLOS LUNA | CARLOS LUNA | CARLOS LUNA | CARLOS LUNA |

NOTA: NOS ENCONTRAMOS EN BIBLIOTECA, A UN LADO DEL CENTRO DE COMPUTO.

ASESORIAS DE MATEMÁTICAS: ING.MIGUEL RIOS, DE LUNES A VIERNES DE 10:00 A 11:00 CUBO 21 EDIFICIO "D"

**¡SOMOS CORRECAMINOS DE CORAZÓN!**

PRODUCCIÓN: ING. MANUEL ISMAEL PULIDO MEDINA, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. CARLOS ROBERTO LUNA GONZÁLEZ, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. MARCIAL HUMBERTO VÁSQUEZ CORRAL, DIVISIÓN DE ELECTROMECÁNICA.
ING. MIGUEL ANGEL RIOS FAVELA, DIVISIÓN DE ELECTRÓNICA.

*He aquí la Matemática, la creación más original del ingenio humano.* – WHITEHEAD